

Mohamed Aqalmoun

Réduction des endomorphismes

Module M17

www.aqalmoun.com
Mohamed Aqalmoun

Table des matières

1	Éléments propres et polynômes d'endomorphismes	5
1.1	Sous espaces stables	5
1.2	Polynômes d'endomorphismes	7
1.3	Polynôme minimal	8
1.4	Décomposition des noyaux	9
1.5	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	10
1.6	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice	13
1.7	Theorème de Cayley-Hamilton	15
1.8	Sous espaces caractéristiques	16

www.aqalmoun.com
Mohamed Aqalmoun

Chapitre 1

Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

1.1 Sous espaces stables

Définition 1.1.

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E .

1. On dit que F est stable par u si $u(F) \subseteq F$ i.e pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.
2. Si F est stable par u , on appelle endomorphisme induit par u sur F , l'endomorphisme de F noté u_F qui à tout x associe $u(x)$.

Exemples :

1.
2.

Proposition 1.2.

Soient $E_1, \dots, E_r$ des sous-espaces vectoriels de E et u un endomorphisme de E .

Si $E_1, \dots, E_r$ sont stables par u , alors :

1. Le sous espace vectoriel $\bigcap_{i=1}^r E_i$ est stable par u .
2. Le sous espace vectoriel $\sum_{i=1}^r E_i$ est stable par u . En particulier, si les sous espaces vectoriels sont en somme directe, le sous espace vecto-

riel $\bigoplus_{i=1}^r E_i$ est stable par u .

Démonstration :

1.
2.

Théorème 1.3.

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors $\text{Im } v$ et $\text{ker } v$ sont stables par u .

Démonstration :

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Puisque u commute avec lui même, les sous espaces vectoriels $\text{ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par u .

Proposition 1.4.

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous espace vectoriel de E et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F est stable par u ,
2. Pour tout $1 \leq i \leq p$, $u(e_i) \in F$.

Démonstration :

Proposition 1.5.

Soient E un espace vectoriel de dimension n , F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et u un endomorphisme de E . Alors F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans toute base adaptée à F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration :

Remarque : La matrice A représente la matrice de l'endomorphisme u_F dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

1.2 Polynômes d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On note

$$\begin{cases} u^0 &= \text{Id}_E \\ u^n &= \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi pour $n \geq 1$, $u^n = u^{n-1} \circ u = u \circ u^{n-1}$.

Définition 2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. L'endomorphisme $P(u)$ est défini par ;

$$P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n$$

Remarque : Si $P = c$ est un polynôme constant, alors $P(u) = c \text{Id}_E$.

Proposition 2.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(P) = P(u)$ est un morphisme d'algèbres c'est-à-dire linéaire, $\varphi(PQ) = P(u) \circ Q(u)$ et $\varphi(1) = \text{Id}_E$.

Démonstration :

Version matricielle : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note par $P(M)$ la matrice

$$P(M) := \sum_{k=0}^m a_k M^k = a_0 I_p + a_1 M + \dots + a_m M^m$$

L'application $\Psi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\Psi(P) = P(M)$ est un morphisme d'algèbres c'est-à-dire linéaire, $\Psi(PQ) = \Psi(P)\Psi(Q)$ et $\Psi(1) = I_n$.

Définition 2.3.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de M si $P(M) = 0$.

Exemple : Si u est un projecteur de E ,

Proposition 2.4.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, notons $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(M)$$

Ainsi, un polynôme P est annulateur de u si, et seulement si, P est annulateur de M .

Démonstration :

1.3 Polynôme minimal

Théorème et définition 3.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Il existe un unique polynôme annulateur de u (respectivement de M) de degré minimum et unitaire appelé polynôme minimal de u (respectivement de M). On le note π_u (respectivement π_M).

Démonstration :

Exemple :

1. $\pi_{I_n} = X - 1$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 3.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si P est un polynôme annulateur de u , alors π_u divise P .

Démonstration :

Remarque : On a la version matricielle suivante : Si P est un polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors π_M divise P .

Théorème 3.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\pi_u = \pi_A$.

Démonstration :

1.4 Décomposition des noyaux

Théorème 4.1. (Lemme des noyaux)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Alors

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)).$$

De plus, la projection de $\ker((PQ)(u))$ sur $\ker(P(u))$ et parallèlement au $\ker(Q(u))$ est un polynôme en u .

Démonstration :

Corollaire 4.2. (Lemme des noyaux généralisé)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_r$. Alors

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u)).$$

De plus, la projection de $\ker(P(u))$ sur $\ker(P_j(u))$ et parallèlement à la somme $\bigoplus_{i=1, i \neq j}^r \ker(P_i(u))$ est un polynôme en u .

Démonstration : Par récurrence sur r .

Exemple : Soit E un espace vectoriel et s une symétrie de E .

Remarque : Un cas particulier : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts et $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$$

Corollaire 4.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_r$. Si P est un polynôme annulateur de u , alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u)).$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que $\ker(P(u)) = E$.

1.5 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Définition 5.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une valeur propre de u , s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.
2. Si λ est une valeur propre de u , tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .
3. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u et se note $\text{sp}(u)$ ou $\text{spec}(u)$.

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (x + y, x + y)$. On a ..

Proposition 5.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. λ est une valeur propre de u ,
2. L'endomorphisme $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.
3. $\ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$.

Si de plus E est de dimension finie, les assertions précédentes sont équivalentes à $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme.

Démonstration :

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $0 \in \text{sp}(u)$ si, et seulement si,
Si de plus E est de dimension finie, alors $0 \in \text{sp}(u)$ si, et seulement si,

Définition 5.3. (Sous espace propre)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . Le sous espace propre associé à la valeur propre λ est le sous espace vectoriel noté $E_\lambda(u)$, défini par

$$E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Exemple : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + y, x + y)$. On a $2 \in \text{sp}(u)$, et $E_2(u) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x, y) = 2(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \text{Vect}((1, 1))$

CHAPITRE 1 : Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

Remarques : Si λ est une valeur propre de u , alors :

1. Le sous espace propre $E_\lambda(u)$ est formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.
2. $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$, en d'autres termes $E_\lambda(u)$ est un sous espace vectoriel non nul.
3. Le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre (c'est par définition).

Théorème 5.4. (Somme de sous espaces propres)

Soit $u \in \mathcal{L}(u)$, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u ($r \geq 2$). Alors les sous espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ sont en somme directe c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$$

Démonstration :

Remarque : Un cas particulier ($r = 2$) : Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u , alors

$$E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0\}$$

Corollaire 5.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $e_1, \dots, e_r$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre.

Démonstration :

Corollaire 5.6.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . L'endomorphisme u admet au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Démonstration :

Éléments propres d'une matrice carrée :

Définition 5.7.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une valeur propre de M , s'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$.

2. Si λ est une valeur propre de M , tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .
3. L'ensemble des valeurs propres de M est appelé le spectre de M et se note $\text{sp}(M)$ ou $\text{spec}(M)$.
4. Soit λ une valeur propre de M , le sous espace propre associé à la valeur propre λ , noté $E_\lambda(M)$ est le sous espace vectoriel $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / MX = \lambda X\}$.

Proposition 5.8.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. λ est une valeur propre de M ,
2. $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible,
3. $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Démonstration :

Remarque : La proposition précédente, donne une méthode pratique pour trouver les valeurs propres d'une matrice, à savoir ; λ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est une solution de l'équation $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Le théorème suivant donne un lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice dans une base fixée.

Théorème 5.9.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors

1. $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(M)$.
2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u) (= \text{Sp}(M))$, $x \in E$ et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de M associé à la même valeur propre λ .

Démonstration :

Proposition 5.10.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \text{sp}(u)$, $x \in E_\lambda(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$, en particulier $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Démonstration :

Remarque : La version matricielle du résultat précédent ; si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(M)X = P(\lambda)X$.

Corollaire 5.11.

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P est un polynôme annulateur de u , alors toute valeur propre de u est une racine de P . En d'autres termes

$$\text{sp}(u) \subseteq \{ \text{les racines de } P \}$$

Démonstration :

Remarque : Si P est un polynôme annulateur de u , il se peut que l'une des racines de P ne soit pas une valeur propre de u , comme le montre l'exemple suivant : $u = \text{Id}_E$ et $P = X(X-1)$. Clairement P est annulateur de u . Mais 0 est une racine de P qui n'est pas une valeur propre de u .

Corollaire 5.12.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors $\text{sp}(u) = \{0\}$.

Démonstration :

1.6 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 6.1.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M est le polynôme noté χ_M à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par : $\chi_M(X) := \det(M - XI_n)$.

Exemples :

1. Le polynôme caractéristique de l'identité :
2. Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Définition 6.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u noté χ_u est le polynôme caractéristique des d'une de ses matrices dans une base de E (ce polynôme ne dépend pas du choix de cette base). Ainsi, si M est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E , on a par définition $\chi_u = \chi_M$.

Remarque : (Pour la justification de la définition précédente)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Notons M (respectivement M') la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Par la formule de changement de bases, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$M = PM'P^{-1}$$

On vérifie facilement que $M - XI_n = P(M' - XI_n)P^{-1}$, on a donc

$$\chi_M = \det(M - XI_n) = \det(P(M' - XI_n)P^{-1}) = \det(M' - XI_n) = \chi_{M'}$$

Ce qui donne la consistance à la définition précédente.

Proposition 6.3.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. χ_M est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.
2. Le coefficient de X^{n-1} de χ_M est $(-1)^{n-1} \text{tr}(M)$.
3. Le terme constant est $\det(M)$

Remarque : On peut résumer la proposition précédente dans la formule suivante : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) X^{n-1} + \dots + \det(M)$$

Théorème 6.4.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres de M sont les racines de χ_M dans $\mathbb{K}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.

Démonstration :

Remarque : (Cas d'une matrice triangulaire) :

Proposition 6.5.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M possède au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n . Alors u possède au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Démonstration :

Proposition 6.6.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E stable par u .

1. χ_{u_F} divise χ_u .
2. Si G est un supplémentaire de F dans E (i.e $E = F \oplus G$) et stable par u , alors $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$.

Démonstration :

Définition 6.7.

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre λ (d'un endomorphisme ou matrice), et on note m_λ , son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Remarque : Par définition de m_λ , on a $m_\lambda = \max\{k \in \mathbb{N} / (X - \lambda)^k \text{ divise } \chi_u\}$. Ainsi, un entier $k \leq m_\lambda$ si, et seulement si, $(X - \lambda)^k$ divise χ_u .

Théorème 6.8.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u et m_λ son ordre de multiplicité. Alors

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$$

Démonstration :

1.7 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 7.1. (Théorème de Cayley-Hamilton)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_M(M) = 0$

En d'autres termes, le polynôme caractéristique de u (respectivement de M) annule u (respectivement M).

Démonstration :

Corollaire 7.2.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors π_u divise χ_u .
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors π_M divise χ_M .

Démonstration :

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2. On sait que

Proposition 7.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine de π_u . En d'autres termes, les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal π_u .

Démonstration :

1.8 Sous espaces caractéristiques

Définition 8.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ . On appelle sous espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ qu'on note $N_\lambda(u)$, le sous espace vectoriel

$$N_\lambda(u) := \ker((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda})$$

Remarques :

1. $N_\lambda(u)$ est stable par u car les deux endomorphismes u et $(u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}$ commutent.

2. $E_\lambda(u) \subseteq N_\lambda(u)$.

Le lemme des noyaux donne le corollaire suivant :

Corollaire 8.2.

Les sous espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Démonstration :
En combinant le lemme des noyaux avec le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 8.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus la projection de E sur chaque sous espace caractéristique $N_\lambda(u)$ et parallèlement aux autres sous espaces caractéristiques est un polynôme en u .

Démonstration : Immédiate.

Théorème 8.4. (poly. cara. d'un endo. nilpotent)

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors

$$\chi_u = (-1)^n X^n$$

Démonstration : Montrons le résultat par récurrence sur $\dim E = n \geq 1$
La propriété est ainsi prouvée par récurrence.

Théorème 8.5.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u .

1. $\dim(N_\lambda(u)) = m_\lambda$.
2. Soit u_λ l'endomorphisme induit par u dans $N_\lambda(u)$. Alors

$$\chi_{u_\lambda} = (-1)^{m_\lambda} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

Démonstration :