Structures algébriques : Groupes, anneaux et corps

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Il s'agit de montrer que si $x, y \in G$ alors $x * y \in G$. Soient $x, y \in G =]-1,1[$. D'abord $|xy| < 1$ donc $-1 < xy$ par suite $1+xy > 0$. D'autre part, on a

$$x * y - 1 = \frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-1-xy}{1+xy} = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy}$$

Remarquons que $x-1 < 0$ et $1-y > 0$, donc $x*y-1 < 0$, autrement dit $x * y < 1$. De même on a

$$x * y + 1 = \frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{x+y+1+xy}{1+xy} = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$$

Donc $-1 < x * y$. On en déduit que $x * y \in]-1,1[= G$.

2. Associativité : Soient $x, y, z \in G =]-1,1[$. On a

$$(x * y) * z = (\frac{x+y}{1+xy}) * z = \frac{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + z}{1 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

On vérifie par un calcul analogue que

$$x * (y * z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

Ce qui justifie l'associativité de la loi $*$.

Le neutre : Pour tout $x \in G$, on a $x * 0 = \dfrac{x+0}{1+x.0} = x$ et $0 * x = x$. Donc 0 est le neutre pour la loi $*$.

Le symétrique : Soit $x \in G$, on a $x * (-x) = (-x) * x = 0$, donc x est symétrisable et son symétrique est $-x$.

Conclusion : $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 2

1. Il s'agit de montrer que si $x, y \in G$ alors $x * y \in G$ c'est-à-dire $x * y \neq 1$. Soient $x, y \in G$. On a $x * y - 1 = x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y)$. Clairement $(x-1)(1-y) \neq 0$, par suite $x * y - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x * y \neq 1$. Donc $x * y \in G$.
2. L'associativité : Soient $x, y, z \in G$, on a

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y + z - xy - xy - zy - xyz$$

Aussi $x * (y * z) = x + y + z - xy - xy - zy - xyz$. La loi est donc associative.
le neutre : On a $x * 0 = 0^x = x$ donc 0 est le neutre de G.
Le symétrique : Soit $x \in G$. Pour $y \in G$, on a $x * y = 0$ si, et seulement si, $x + y - xy = 0$ si, et seulement si, $y = \dfrac{x}{x-1}$. Ainsi x est symétrisabe et $\operatorname{sym}(x) = \frac{x}{x-1}$.
Conclusion : $(G : *)$ est un groupe.

Exercice 3

Soient $x, y \in G$, on a

$$xy = xy(yx)^2 = xyyxyx = xy^2xyx = xxyx = x^2yx = yx$$

Donc G est un groupe commutatif.

Exercice 4

$\mathbb{U}$ Sous groupe : On a $|1| = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}$. Si $z, z' \in U$ alors

$$\left|z'z^{-1}\right| = \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} = 1$$

Ainsi $z'z^{-1} \in \mathbb{U}$. On en déduit que $\mathbb{U}$ est un sous groupe de $\mathbb{C}^*$.
$\mathbb{U}_n$ Sous groupe : On a $1^n = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}_n$. Si $z, z' \in U_n$, alors

$$\left(z'z^{-1}\right)^n = \left(\frac{z'}{z}\right)^n = \frac{z'^n}{z^n} = 1$$

Ainsi $z'z^{-1} \in \mathbb{U}_n$. On en déduit que $\mathbb{U}_n$ est un sous groupe de $\mathbb{C}^*$

Exercice 5

1. Pour tout $y \in G$, on a $ye = ey$, donc $e \in Z(G)$.
   Soit $x, x' \in Z(G)$. Pour tout $y \in G$ on a $(xx')y = xx'y = xyx' = yxx' = y(xx')$ donc $xx' \in Z(G)$.
   Soit $x \in G$. Si $y \in G$, alors $xy = yx$, on compose respectivement à droite et à gauche par x^{-1} on obtient $yx^{-1} = x^{-1}y$, en d'autre termes x^{-1} commute avec tout les éléments de G. D'où $x^{-1} \in Z(G)$.
2. Soient $x, y \in Z(G)$. Par définition x commute avec tous les éléments de G, en particulier x commute avec y. Le sous groupe $Z(G)$ est donc commutatif.

Exercice 6

Puisque $e^1 = e$, l'élément neutre e est bien dans H.
Soit $x, y \in H$. Ils existent $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^n = e$ et $y^m = e$. Remarquons, par la commutativité de G, que $(xy)^{nm} = x^{nm}y^{nm}$. Mais $x^{nm} = (x^n)^m = e^m = e$, de même $y^{nm} = e$, par conséquent $(xy)^{nm} = e$. Puisque $nm \in \mathbb{N}^*$ on a donc $xy \in H$.
Soit $x \in H$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^n = e$. Remarquons que $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$ donc $x^{-1} \in H$.
Conclusion : H est un sous groupe de G.

Exercice 7

1. Dire que $K \not\subseteq H$ signifie qu'il existe $k_0 \in \mathbb{K}$ tel que $k_0 \notin H$.
2. Soit $h \in H$. On a h et k_0 sont des éléments de $K \cup H$ et ce dernier est un sous groupe, donc $hk_0 \in K \cup H$, puis que $hk_0 \in K$ ou $hk_0 \in H$. Mais $hk_0 \notin H$, car si $hk_0 \in H$, on aura $k_0 = \underbrace{h^{-1}}_{\in H}\underbrace{hk_0}_{\in H} \in H$, ce qui n'est pas compatible avec le fait que $k_0 \notin H$. Il en résulte alors que $hk_0 \in K$. D'où le résultat.
3. Soit $h \in H$. D'après le résultat de la question précédente, $hk_0 \in K$, par suite $h = \underbrace{hk_0}_{\in K}\underbrace{k_0^{-1}}_{\in K} \in K$. Par conséquent $H \subseteq K$.

Exercice 8

1. Supposons que $HK = KH$. On a $e = ee \in HK$ car $e \in H$ et $e \in K$.
Soient $x, y \in HK$. Ils existent $h, h' \in H$ et $k, k' \in K$ tels que $x = hk$ et $y = h'k'$. On a $xy = hkh'k'$, puisque $kh' \in KH = HK$, ils existent $h_1 \in H$ et $k_1 \in K$ tels que $kh' = h_1k_1$. Par suite
$$xy = hkh'k' = hh_1k_1k' = (hh_1)(k_1k')$$
Or $hh_1 \in H$ et $k_1k' \in K$, il vient que $xy \in HK$.
Soit $x \in HK$, avec les notations précédente, $x = hk$ où $h \in H$ et $k \in K$. On a
$$x^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$$
Puisque $k^{-1} \in K$ et $h^{-1} \in H$, il vient que $x^{-1} \in KH = HK$.
Conclusion : HK est un sous groupe de G.

2. On suppose que HK est un sous groupe de G.
Soit $x \in HK$. Puisque HK est un sous groupe de G $x^{-1} \in HK$, ils existent alors $h \in H$ et $K \in K$ tels que $x^{-1} = hk$. Donc $x = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Il en résulte que $HK \subseteq KH$.
Soit $x \in KH$. Ils existent $k \in K$ et $h \in H$ tels que $x = kh$. Remarquons maintenant que $x^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$. Du fait que HK est un sous groupe de G, il vient que $x = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$. D'où $KH \subseteq HK$.
Conclusion : $H = KH$.

Exercice 9

Clairement $*$ est une loi de composition interne sur G, autrement dit, si $x, y \in G$ alors $x * y = xg^{-1}y \in G$.
Soient $x, y, z \in G$. On a $x * (y * z) = x * (yg^{-1}z) = xg^{-1}yg^{-1}z$ de même $(x * y) * z = xg^{-1}yg^{-1}z$, donc $x * (y * z) = (x * y) * z$. Ainsi la loi est associative.
Pour tout $x \in G$, on a $x * g = xg^{-1}g = x$ et $g * x = gg^{-1}x = x$, donc g est l'élément neutre de G pour la loi $*$.
Soit $x \in G$, on a $x * (gx^{-1}g) = xg^{-1}gx^{-1}g = g$ et $(gx^{-1}g)x = gx^{-1}gg^{-1}x = g$, donc est symétrisable (pour la loi $*$) et son symétrique est $gx^{-1}g$.

Exercice 10

On a $e = geg^{-1}$, donc $e \in gHg^{-1}$.
Soient $x, y \in$, ils existent $h, h' \in H$ tels que $x = ghg^{-1}$ et $y = gh'g^{-1}$. On a

$$xy^{-1} = (ghg^{-1})(gh'g^{-1})^{-1} = ghg^{-1}gh'^{-1}g^{-1} = g(hh'^{-1})g^{-1}$$

Comme H est un sous groupe de G, hh'^{-1} est un élément de H, donc $g(hh'^{-1})g^{-1} \in gHg^{-1}$, ou encore $xy^{-1} \in gHg^{-1}$.
On en déduit que gHg^{-1} es une sous groupe de G.