Structures algébriques : Groupes, anneaux et corps

Exercice 1

Soit $G =]-1, 1[$. On définit une loi $*$ sur G par:

$$\forall (x, y) \in G^2, x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1. Justifier que $*$ est une loi de composition interne sur G .
2. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 2

Soit $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On définit une loi $*$ sur G par:

$$\forall (x, y) \in G^2, x * y = x + y - xy$$

1. Justifier que $*$ est une loi de composition interne sur G .
2. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 3

Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est un groupe abélien (commutatif).

Exercice 4

On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Montrer que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ sont des sous groupes de $\mathbb{C}^*$ (muni de la multiplication).

Exercice 5

Soit G un groupe. Posons $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de G .
2. Montrer que $Z(G)$ est commutatif.

Exercice 6

Soit G un groupe abélien (commutatif). Posons

$$H = \{x \in G \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^n = e\}$$

Montrer que H est un sous groupe de G .

Exercice 7

Soit G un groupe, K et H deux sous groupes de G . On suppose que $H \cup K$ est un sous groupe de G et que $K \not\subseteq H$.

1. Justifier qu'il existe $k_0 \in K$ tel que $k_0 \notin H$.
2. Soit $h \in H$. Montrer que $hk_0 \in K$.
3. En déduire que $H \subseteq K$.

Exercice 8

Soit G un groupe, H et K deux sous groupes de G . On pose $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que si $HK = KH$ alors HK est un sous groupe de G .
2. Montrer que si HK est un sous groupe de G alors $HK = KH$.

Exercice 9

Soit G un groupe et $g \in G$. On définit une loi sur G par $x * y = xg^{-1}y$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 10

Soit G un groupe et H un sous groupe de G . Pour $g \in G$ posons $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Montrer que gHg^{-1} est un sous groupe de G .

Exercice 11

Soit G un groupe et H une partie finie non vide et stable pour la loi de G .

1. Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^N = e$.
2. Montrer que H est un sous groupe de G .

Exercice 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Soit H un sous groupe non nul de $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $H \neq \{0\}$.
 - 2.1 Montrer que $H \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément p .
 - 2.2 Montrer que $H = p\mathbb{Z}$.

Exercice 13

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}$ l'application définie par $f(n) = e^{in\theta}$.

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminer $\ker f$.

Exercice 14

Soit G un groupe. Pour $g \in G$, posons $i_g : G \rightarrow G$ définie pour tout $x \in G$ par $i_g(x) = gxg^{-1}$.

1. Montrer que i_g est un automorphisme de groupes.
2. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ l'application définie par $\varphi(g) = i_g$.
 - 2.1 Montrer que φ est un morphisme de groupe.
 - 2.2 Déterminer le noyau de φ .

Exercice 15

Soit G un groupe et $g : G \rightarrow G$ définie par $f(g) = g^{-1}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que si G est abélien alors f est un morphisme de groupes.
3. Montrer que G est abélien si, et seulement si, f est un morphisme de groupes.

Exercice 16

Écrire les décompositions en cycles disjoints les permutations suivantes:

1. $\sigma = (1\ 3)(3\ 4\ 5\ 6\ 7)(2\ 7\ 8)$.
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & \end{pmatrix}$.

Calculer les signatures des permutations précédentes.

Exercice 17

1. Soit $\sigma = (257)$. Calculer σ^3 .
2. Soit $\sigma \in S_n$ un p -cycle. Calculer σ^p .
3. Soit σ, σ' de cycles à supports disjoints. Montrer que $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$.
4. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 8 & 5 & 1 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2021} .

Exercice 18

On note A_n l'ensemble des éléments de S_n de signature positive..

1. Montrer que A_n est un sous groupe de S_n .
2. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que $\sigma A_n \sigma^{-1} = A_n$.

Exercice 19

Soit A un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $x = -x$.
2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 20

Soit A un anneau commutatif unitaire fini. Montrer que si A est intègre alors A est un corps. Indication : considérer l'application $x \mapsto ax$.

Exercice 21

Soit A un anneau unitaire et $a, b \in A$. On suppose que $1 - ab$ est inversible et notons α son inverse.

1. Calculer $(1 - ba)(1 - b\alpha a)$.
2. En déduire que $1 - ba$ est inversible.

Exercice 22

Soit A un anneau unitaire. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si xy est nilpotent alors yx .
2. Soit $(x, y) \in A^2$ tel que $xy = yx$. Montrer que si x et y sont nilpotent alors $x + y$ est nilpotent.
3. Soit $x \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible.

Exercice 23

Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit $I = \{x \in A / x \text{ nilpotent}\}$. Montrer que I est un idéal de A . Indication: on pourra utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.

Exercice 24

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\}$.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = 0$. Montrer que $a = b = 0$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous anneau (unitaire) de $\mathbb{R}$.
4. Soit $h : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'application définie par $h(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$. Montrer que h est un morphisme d'anneaux (unitaires).
5. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et on suppose que $z = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible.
 - 5.1 Montrer que $a - b\sqrt{2}$ est inversible.
 - 5.2 En déduire que $|a^2 - 2b^2| = 1$.
6. Déterminer $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$.

Exercice 25

On considère $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib / a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer $U(\mathbb{Z}[i])$.

Exercice 26

Montrer que $Q[i] = \{a + ib / a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 27

1. Soit G un groupe fini de cardinal n et H un sous groupe de G .
 - 1.1 Soit $x \in G$. Montrer que $|xH| = |H|$.
 - 1.2 Montrer que la relation binaire définie sur G par: $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si, $x^{-1}y \in H$, est une relation d'équivalence. On note $G/\mathcal{R} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$.

Exercice 28

Soit A un anneau commutatif unitaire dont les seuls idéaux sont $\{0\}$ et A . Montrer que A est un corps.

Exercice 29

Soit $f : K \rightarrow K'$ un morphisme de corps. Montrer que f est injectif.

Exercice 30

Soit K un corps commutatif fini.

1. Résoudre dans $\mathbb{K}$ l'équation $x^2 = 1$.
2. Montrer que $\prod_{x \in \mathbb{K}^*} x = -1$.
3. Soit p un nombre premier. Montrer que $(p-1)! = -1[p]$.

Exercice 31

1. Montrer que si H est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(n) = n1_{\mathbb{K}}$ est un morphisme d'anneaux.
3. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker f = p\mathbb{Z}$.
4. Montrer que p est nombre premier ou nul. On suppose que p est un nombre premier.
5. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k .
6. Montrer que l'application $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie ar $x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps.

- 1.3 Montrer que pour tout $x \in G$, $\bar{x} = xH$.
- 1.4 Montrer que $|G| = |G/\mathcal{R}||H|$, en déduire que $|H|$ divise $|G|$.
- 1.5 Soit $x \in G$. Montrer que $x^n = e$.
2. Pour n entier naturel ≥ 2 , on pose $\varphi(n) = |U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|$.
 - 2.1 Montrer que $\bar{k} \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.
 - 2.2 En déduire que $\varphi(n) = |\{k \in \{1, \dots, n\} / k \wedge n = 1\}|$.
 - 2.3 Montrer que si $k \wedge n = 1$ alors $k^{\varphi(n)} = 1 [n]$.
 - 2.4 Déterminer $\varphi(n)$ lorsque n est premier.
 - 2.5 Montrer que si n est premier alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^n = k [n]$.
3. Soit n, m deux entiers ≥ 2 et premiers entre eux.
 - 3.1 Soit $h : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ l'application définie par $h(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x})$. Montrer que h est un isomorphisme d'anneaux.
 - 3.2 En déduire que les deux groupes multiplicatifs $U(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})$ et $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sont isomorphes.
 - 3.3 Montrer que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.
4. Soit p un nombre premier et m un entier ≥ 1 . Montrer que

$$\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$$

5. Soit n un entier naturel ≥ 2 et $n = \prod_{k=1}^r p_i^{l_i}$ sa décomposition en facteur premiers. Montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$