Contôle (Algèbre 2)

G

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

H

LEEM

Montesquieu

✾ Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses.

Questions de Cours

1. Rappeler la définition (ou une caractérisation) de sous groupe.
2. Rappeler la définition d'un morphisme de groupes.
3. Rappler la définition du noyau (ker) d'un morphisme de groupes.

Exercice 1 (Question de cours)
Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que $\ker f$ est un sous groupe de G.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous groupe de G'.

Exercice 2
On considère les deux permutations de S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\sigma\sigma'$.
2. Décomposer σ et σ' en produit de cycles disjoints.
3. Calculer les signatures de σ et σ'.

Exercice 3 On considère $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous anneau (unitaire) de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ alors $\overline{z} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ si, et seulement si, $\overline{z}$ est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

4. En déduire que $U(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]) = \{-1, 1\}$.

Exercice 4 Soit G un groupe et H une partie finie non vide et stable pour la loi de G.

1. Soit $a \in H$ et $f_a : H \to H$ l'application définie ,pour $h \in H$, par $f_a(h) = ah$. Montrer que f_a est bien définie et bijective.
2. En déduire que $e \in H$.
3. Montrer alors que H est un sous groupe de G.

PROBLÈME

Autour du théorème de Lagrange

Dans tout le problème G est un groupe fini de cardinal n et g un élément de G.

Première partie : Cas abélien

On suppose dans cette partie que G est commutatif et on considère l'application $f : G \to G$ définie pour tout $x \in G$ par $f(x) = gx$.

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire que $G = \{gx \ / x \in G\}$.
3. Montrer que $g^n \prod_{x\in G} x = \prod_{x\in G} x$
4. En déduire que $g^n = e$.

Deuxième partie : Lagrange

Dans cette partie G est un groupe non nécessairement commutatif et H un sous groupe de G. On définit sur G la relation binaire suivante : Pour tout $(x, y) \in G^2$, $x\mathscr{R}y \iff x^{-1}y \in H$.

5. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
6. Soit $x \in G$. Montrer que $\overline{x} = xH$.
   On note $G/\mathscr{R} = \{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r}\}$.
7. Montrer que $|G| = r|H|$.
8. En déduire que $|H|$ divise $|G|$.

Troisième partie : Cas non commutatif

Dans cette partie $H = \{g^k \ / k \in \mathbb{Z}\}$.

9. Montrer que H est un sous groupe de G.
10. Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = e$.
11. Montrer que $H = \{e, g, \dots, g^{p-1}\}$.
12. Montrer que p divise n.
13. En déduire $g^n = e$.